

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Використано методику чисельного рішення задач термопружності шаруватих композитів на основі методу скінченних елементів. Для моделювання поведінки шаруватої композитної конструкції розроблено субпараметричний скінченний елемент.

NUMERICAL SOLUTION OF THREEDIMENSIONAL PROBLEM OF THERMOELASTICITY FOR MULTILAYER CONSTRUCTIONS

The method of numeral solution of thermoelasticity tasks for layer composites on the basis of the finite element method is developed. For the design of conduct of the layer composite construction a subparameter finite element is developed.

Введение. Среди новых материалов особенное место занимают композиционные материалы, которые имеют целый комплекс разных свойств, рациональное соединение которых позволяет создавать оптимальные конструкции. Достаточно высокая прочность и минимальный удельный вес способствуют широкому применению композиционных материалов в машиностроении, судостроении, авиационной и ракетно-космической технике.

Экспериментальное определение свойств композиционных материалов с разными схемами армирования требует достаточно большого объема дорогих исследований. В связи с этим возникает необходимость построения теоретических моделей композиционных материалов, которые позволили бы определить не только усредненные характеристики, но и описать локальную структуру процессов, которые происходят в таких средах под действием связанных полей. Оценка напряженно-деформированного состояния слоистых конструкций является сложной задачей механики деформируемого твердого тела. В определенной мере эта задача может быть решена на основе универсальных теоретических моделей, для которых число и порядок уравнений не зависят от количества слоев.

Математическое моделирование физико-механического поведения неоднородной композиционной среды осуществляется с помощью уравнений с быстро изменяющимися коэффициентами, которые характеризуют свойства отдельных компонентов материала. Такой подход существенно усложняет решение соответствующих краевых задач даже при использовании современных компьютеров. Одним из направлений упрощения постановки задач механики композитов является разработка математических моделей, которые приводят к более простым уравнениям с усредненными коэффициентами. При этом, уравнения должны быть такими, чтобы решение соответствующей краевой задачи было близким к решению исходной. Решение задач для многослойных конструкций сложной формы связано с математическими трудностями, которые возникают при описании геометрических параметров, условий теплообмена, с внешней средой, условий соединения, учетом внутренних источников тепла, решением систем интегральных уравнений [1-3]. Поэтому многие авторы для упрощения принимают гипотезы о

распределении температуры по толщине пакета. В работах [4, 5] применена гипотеза о кусочно-линейном распределении температуры по толщине многослойных пластин и цилиндрических панелей. В работе [6] для исследования напряжений в многослойных прямоугольных шарнирно-опертых пластинах использовали полиномиальный закон распределения температуры по толщине слоя. Подход к решению задач нестационарной теплопроводности многослойных прямоугольных пластин, основанный на представлении температурного распределения по толщине слоя системой полиномов Лежандра, представленный в работе [3].

Применение аналитических методов для таких задач связано с определенными трудностями, которые обусловлены причинами, в частности, достаточно сложной геометрической формой конструктивного элемента или сложным характером нагрузки. В этом случае актуальным является применение численных методов решения задач механики. Область применения большинства моделей ограничивается лишь элементами конструкций простой геометрической формы и, как правило, сводится к двумерным задачам.

Цель работы. Основной целью данной работы является разработка методики численного решения задачи термоупругости на основе применения метода конечных элементов (МКЭ) в трехмерной постановке.

Материалы и результаты исследования. Решение задачи термоупругости требует определить температурное поле в теле, для чего необходимо решить задачу теплопроводности. Уравнение нестационарной теплопроводности для анизотропного тела можно представить в виде [7]

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \rho c T_{,t} T dv dt = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \lambda^{ij} T_{,i} T_{,j} dv dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \omega_0 T dv dt + \int_{t_1}^{t_2} \iint_S [q + h(T - \theta)] T ds dt, \quad (1)$$

где ρ – удельный вес;

c – теплоемкость;

λ^{ij} – тензор теплопроводности;

ω_0 – мощность внутренних источников тепла;

q – интенсивность тепловых потоков;

h – коэффициент теплопередачи;

θ – температура окружающей среды.

Компоненты тензора напряжений определяются уравнением термоупругости Дюамеля – Неймана, которое представляет собой закон Гука, обобщенный на случай тепловых нагрузок:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta^{ij} (T - T_0), \quad (2)$$

где β^{ij} – тензор изотермических упругих постоянных, которые определяют взаимное влияние температурного поля и поля деформаций.

Применяя конечно элементную дискретизацию по координатам и времени уравнения (1) можно привести к алгебраической системе уравнений. Функцию температуры можно представить в виде:

$$T(x, t) = f(x)g(t). \quad (3)$$

Для конечного элемента (КЭ), который моделирует поведение слоистого элемента конструкции, функция формы может быть представлена в виде:

$$f(x) = \sum_{l=1}^8 \varphi_{(l)}(x^1, x^2, x^3) T_{(l)}. \quad (4)$$

где $\varphi_{(l)}$ – функции формы КЭ.

$$\varphi_{(l)}(x^1, x^2, x^3) = \frac{1}{4} (1 + x_{(l)}^1 x^1) (1 + x_{(l)}^2 x^2) \varphi_{(l)}(x^3). \quad (5)$$

Функции $\varphi_{(l)}$ можно определить в виде [9]:

$$\varphi_{(l)} = \frac{1}{2} \left[1 - x_i^3 + 2x_i^3 \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{h_i - h_{i-1}}{\lambda_{33}^i} + \frac{x^3 - h_{k-1}}{\lambda_{33}^k} \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{h_i - h_{i-1}}{\lambda_{33}^i} \right)^{-1} \right] \quad (6)$$

где h_i – толщина i -го слоя.

Функция времени $g(t)$ принимается линейной.

Применяя конечно разностную аппроксимацию производной по времени с применением схемы Кранка-Николсона получаем матричное уравнение:

$$\left[[H] + \frac{1}{\Delta t} [G] \right] \{T_{n+1}\} = \frac{1}{\Delta t} [G] \frac{1}{\Delta t} \{T_n\} - \{R_n\}, \quad (7)$$

где H, G – матрицы теплопроводности и теплоемкости;

Δt – шаг по времени;

T, R – векторы узловых температур и тепловых нагрузок.

Для решения задач теории упругости используется МКЭ с применением субпараметрических КЭ, которые моделируют поведение слоистого материала, из предположения о неразрывности поля перемещений в зонах контакта на поверхности слоев.

$$u^{(k)} = \sum_{l=1}^8 \varphi_{(l)}^{(k)\pm}(x^1, x^2, x^3) u_{(l)}^{(k)\pm}, \quad (8)$$

где $u_{(l)}^{(k)\pm}$ – вектор перемещений узловых точек k -го слоя КЭ

$$\varphi_{(l)}^{(k)\pm} = \frac{1}{4} (1 + x_{(l)}^1 x^1) (1 + x_{(l)}^2 x^2) \chi_{(l)}^{(k)\pm}(x^3). \quad (9)$$

Для k -го слоя аппроксимация перемещений осуществляется с помощью функции:

$$\chi_{(l)}^{(k)\pm} = \frac{(\pm x^3 \mp x_{(l)}^{3(k)\mp})}{h_k}, \quad (10)$$

Компоненты вектора перемещений точек k -го слоя КЭ можно аппроксимировать в виде разложения:

$$u_i^{(k)} = \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \omega_i^{(pqr)} \psi^{(pqr)}, \quad (11)$$

где $\omega_i^{(pqr)}$ – коэффициенты разложения;

$\psi^{(pqr)}$ – набор степенных координатных функций

$$\psi^{(pqr)} = \frac{(\xi^1)^p}{p!} \frac{(\xi^2)^q}{q!} \frac{(\xi^3)^r}{r!} \quad (p; q; r = 0, 1). \quad (12)$$

Между компонентами разложения по базисным функциям $\psi^{(pqr)}$ перемещений точек слоя существует взаимосвязь:

$$u_i^{(k)} = \{u_{(l)i}^{(k)\pm}\}^T \{\varphi\} = \{\omega_i\}^T \{\psi\}, \quad (13)$$

где

$$\{\omega_i\} = [A] \{u_{(l)i}^{(k)\pm}\}. \quad (14)$$

Компоненты тензора деформаций представим в виде разложения по степенным функциям:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{stq} e_{ij}^{(stq)} \psi^{(stq)} \quad (15)$$

В матричном виде

$$\varepsilon_{ij} = \{e_{ij}\}^T \{\psi_{(ij)}\} \quad (16)$$

где $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(a_n^i \frac{\partial u_n}{\partial x^j} + a_n^j \frac{\partial u_n}{\partial x^i} \right)$ – линейный тензор деформации;

$a_n^i = \frac{\partial z^i}{\partial x^n}$ – тензор преобразования координат.

Представим коэффициенты разложения e_{ij} тензора деформации ε_{ij} , которые входят в (16) через коэффициенты аппроксимации перемещений $\omega_k^{(pqr)}$ (13):

$$\{e_{ij}\} = [F_{ij}^k] \{\omega_k\}. \quad (17)$$

Вариация упругой энергии деформации k -го слоя имеет вид:

$$\delta W_k = \iiint_{V_k} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv = \iiint_{V_k} C^{ijnm} \varepsilon_{nm} \delta \varepsilon_{ij} dv. \quad (18)$$

Компоненты тензора упругих характеристик C_*^{ijkl} задаются в соответствии с анизотропией композита в системе координат ξ_i , связанной с осями анизотропии. В местной системе координат x^i тензор упругих характеристик имеет вид [10]:

$$C^{ijkl} = C_*^{mnpq} d_m^i d_n^j d_p^k d_q^l, \quad (19)$$

где d_m^i – тензор преобразования системы координат, связанный с тензором ко-

ординат $h_m^i = \frac{dx^i}{d\xi_m}$ следующим соотношением

$$d_m^i = \frac{h_m^i}{\sqrt{g_{mm}}};$$

g_{mn} – компоненты метрического тензора).

Подставив выражение (16) в (18) получаем:

$$\delta W_k = \iiint_{V_k} \{\delta e_{ij}\}^T \{\psi_{(ij)}\}^T [C^{ijnm}] \{\psi_{(nm)}\} \{e_{nm}\} dv = \{\delta e_{ij}\}^T [H^{ijnm}] \{e_{nm}\}, \quad (20)$$

здесь

$$[H^{ijnm}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{\xi_{(k)-}^3}^{\xi_{(k)+}^3} \{\psi_{(ij)}\}^T [C^{ijnm}] \{\psi_{(nm)}\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 \quad (21)$$

– матрица упругих постоянных, которая характеризует физические свойства анизотропного материала k -го слоя.

Тогда вариация энергии упругой деформации будет иметь вид:

$$\delta W = \sum_k \delta W_k = \delta \{u_s\}^T [K^{st}] \{u_t\}, \quad (22)$$

где $[K^{st}]$ – матрица жесткости конечного элемента.

Исходя из закона сохранения энергии, используем вариационное уравнение термоупругости Био, как обобщение вариационного принципа Лагранжа [7]:

$$\iiint_{V_k} \delta F dx^1 dx^2 dx^3 - \iiint_{V_k} \bar{P} \delta \bar{u} dx^1 dx^2 dx^3 - \iint_{S_k} \bar{q} \delta \bar{u} ds = 0. \quad (23)$$

Вариация свободной энергии δF вычисляется по формуле:

$$\delta F = \delta W - \sigma_{(T)}^{ij} \delta \varepsilon_{ij}, \quad (24)$$

где $\delta W = \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij}$ – вариация упругой энергии деформации;

$\sigma_{(T)}^{ij}$ – температурные напряжения.

Использование конечно элементной аппроксимации позволяет получить матричное уравнение на каждом шаге по времени в виде:

$$[K]\{u\} = \{R\}, \quad (25)$$

где $[K]$ – матрица жесткости;

$\{u\}$ – вектор узловых перемещений;

$\{R\}$ – вектор узловых нагрузок, обусловленных действием механических и тепловых нагрузок.

Задача. Определение температурного поля в массиве обтекателя. Обтекатель имеет параболический профиль, обусловленный уравнением $z = -0,175r^2 + 70$ (рис. 1). Оболочка обтекателя состоит из 24 графитоэпоксидных слоев. Каждый слой имеет толщину 1,25 мм, что обеспечивает суммарную толщину 30 мм. Волокна наматываются либо в окружном, либо в меридиональном направлении. Тепловой поток через наружную поверхность изменяется от q_1 до q_4 (рис. 1), где $q_1 = 0,3$ Вт/мм²; $q_2 = 0,01$ Вт/мм²; $q_3 = 0,001$ Вт/мм²; $q_4 = 0,0001$ Вт/мм².

Температура внутренней поверхности сердцевины равняется нулю. Коэффициенты теплопроводности $k_1 = 0,08$ Вт/(мм·К), $k_2 = k_3 = 0,008$ Вт/(мм·К).

Температурные поля и поля напряжений в обтекателе при различной ориентации волокон и последовательностях укладки слоев, возникающие от наложения вышеуказанных граничных тепловых условий показаны на рис. 2 – рис. 5.

Результаты решения задачи теплопроводности удовлетворительно совпадают с данными работы [10], полученными для осесимметричной постановки. Существенная анизотропия теплофизических и механических свойств материала приводит к тому, что при однонаправленной укладке волокон возникают

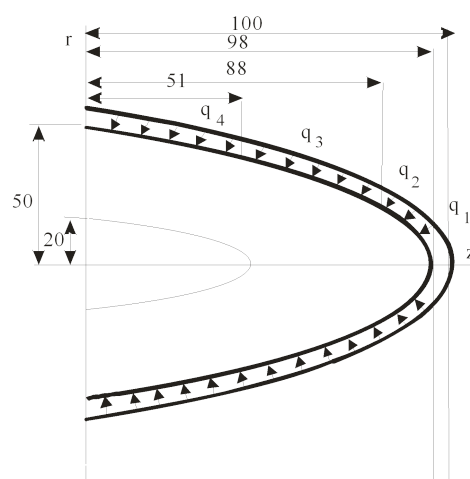


Рис. 1 — Расчетная схема обтекателя

большие градиенты распределения температур и напряжений. Оптимальным является перекрестный способ укладки волокон.

Распределение температур

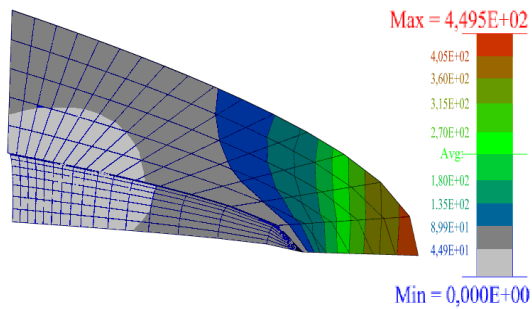


Рис. 2 – Результаты расчета для случая укладки волокон в окружном направлении (под углом 90° к оси Oz)

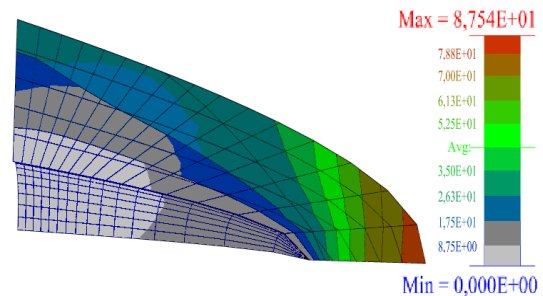


Рис. 3 – Результаты расчета для случая укладки волокон в меридиональном направлении

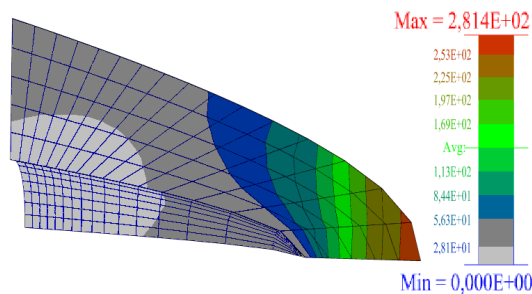


Рис. 4 – Результаты расчета для случая укладки 12 слоев волокон в направлении, перпендикулярном оси Oz , и 12 слоев в меридиональном направлении ($90_{12}/0_{12}$)

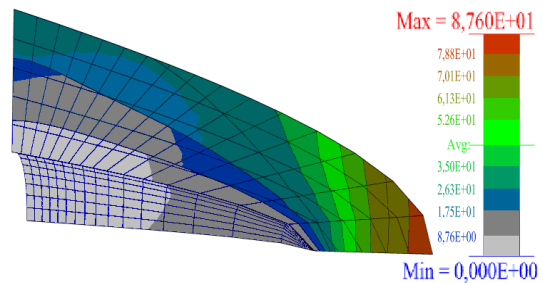


Рис. 5 – Результаты расчета для случая укладки 12 слоев волокон в меридиональном направлении и 12 слоев в направлении, перпендикулярном оси Oz ($0_{12}/90_{12}$)

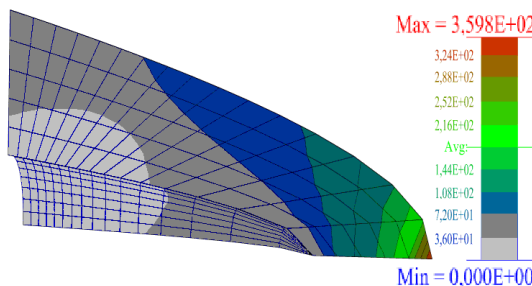


Рис. 6 – Результаты расчета для случая перекрестной укладки 6 слоев волокон в направлении, перпендикулярном оси Oz , и 6 слоев в меридиональном направлении ($90_6/0_6$)₂

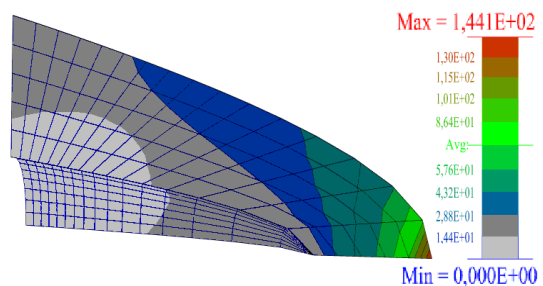


Рис. 7 – Результаты расчета для случая перекрестной укладки 6 слоев в меридиональном направлении и 6 слоев волокон в направлении, перпендикулярном оси Oz ($0_6/90_6$)₂

При меридиональной укладке волокон величина максимальной температуры практически в пять раз меньше, чем при укладке волокон в окружном направлении. Распределение компонент температурных напряжений имеет значительный градиент при однонаправленной укладке волокон. Минимальным разброс напряжений получается при перекрестной намотке волокон типа $(0_6/90_6)_2$ или $(90_6/0_6)_2$.

Выводы. Разработанная методика решения задач термоупругости слоистых анизотропных конструкций позволяет проводить расчеты реальных конструкций. При этом можно избежать использования упрощающих гипотез, которые приво-

дят к достаточно большим ограничениям и погрешностям. Использование трехмерных конечных элементов позволяет моделировать термоупругое поведение реальных трехмерных конструкций произвольной пространственной формы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Подстригач Я.С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
2. Слесаренко А.П. Математическое моделирование тепловых процессов в телах сложной формы при нестационарных граничных условиях / А.П. Слесаренко // Пробл. машиностр. – 2002. – Т. 5. – №4. – С. 72-80.
3. Kantor B.Ya. Analysis of non – stationary temperature fields laminated strips and plates / B.Ya. Kantor, N.V. Smetankina, A.N. Shupikov // Int. J. Solids Structures. – 2001. – Vol., N 48/49. – Pp. 8673-8684.
4. Barut A. Non-linear analysis of composite panels under non uniform temperature distribution/ A. Barut, E. Madenci, A. Tessler // Int. J. Solids and Structures. – 2000. – Vol. 37, N 37. – Pp. 3681-3713.
5. Verijenko V.E. Refined theory of laminated anisotropic shells for the solution of thermal stress problems / V.V. Eerijenko, T.R. Tauchert , C. Shaikh , P.Y. Tabakov // J. Thermal Stresses. — 1999. – Vol. 22, N 1. – Pp. 75-100.
6. Savoia M. Three-dimensional thermal analysis of laminated composite plate / M. Savoia, J.N. Reddy // Int. J. Solids and Struct. – 1995. – Vol. 32, N 5. – P. 539-608.
7. Киричевский В.В. Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров / В.В. Киричевский, А.С. Сахаров. – К.: Будівельник, 1992. – 216 с.
8. Киричевский В.В. Матрица теплопроводности конечного элемента для решения задач термоупругости слоистых композитов / В.В. Киричевский, Г.А. Козуб // Геотехническая механика. – 2006. – Вып. 63. – С. 172-177.
9. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МИРЕЛА+» // Под общ. ред. Киричевского В.В. – К.: Наук. думка, 2005. – 403с.
10. Сан Л.Х. Расчет термических напряжений в осесимметричных композитных твердых телах / Л.Х. Сан, Т.Р. Сю // Аэрокосмическая техника. – 1991. – № 3. – С. 90-93.